ECON 2200, Kjerneregel, annenderivert og elastisitet; Handout

Kjell Arne Brekke

January 24, 2012

1 Inledning

Dette notatet er noen begreper og noen oppgaver som kan hjelpe deg til å forberede deg til forelesningen. Om du **prøver** å regne deg gjennom disse oppgavene vil det være mye lettere å følge med på det som blir gjennomgått på forelesningen. Alle oppgavene kan besvares på fronter.uio.no. Logg inn med ditt brukernavn og passord fra uio. Om du svarer på alle spørsmålene i froner tjener du 3 poeng til obligatorisk oppgave, uavhengig av om du svarer rett eller galt.

Om du finner oppgavene vanskelig, så ikke bli motløs. Vi skal gå gjennom dette på forelesningen.

2 Litt notasjon

Den deriverte av funksjonen

$$y = f(x)$$

har vi så langt notert som $f'(x)$. Men vi skal se at det ofte er mer hensiktismessig å bruke notasjonen:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ eller } \frac{dy}{dx} \text{ som altså betyr det samme som } f'(x)$$

Denne notasjonen kalles gjerne Leibnitz-notasjon. (Derivasjon ble utviklet parallelt av Leibnitz og Newton.) Den gjør det lettere å se logikken bak neste derivasjonsregel.

3 Kjerneregelen

Kjerneregelen gjelder for funksjoner som er bygget opp at to funksjoner inni hverandre.

$$f(x) = g(u(x))$$

som vi også kunne skrive ved å innføre en hjelpestørrelse u, der

$$\begin{aligned} f(x) &= g(u) \\ u &= u(x) \end{aligned}$$

Kjerneregelen i Leibniz sin notasjon blir da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Når vi setter den opp slik ser det ut som enkel algebra, at vi kan korte bort du på høyre side. (Det er riktig her, men husk vær forsiktig med å korte på denne måten i andre sammenhenger.) Med Newton sin notasjon blir regelen

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

Oppgave 1 *Du skal bruke kjerneregelen til å finne den deriverte av*

$$y = f(x) = \left(x^2 + 1\right)^2$$

Merk her at vi kan skrive dette som ovenfor, med

$$\begin{aligned} y &= g(u) = u^2 \\ u &= u(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Bruk ligningen

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

ovenfor til å regne ut et uttrykk for $f'(x)$. Merk at i første runde vil du få et svar som inneholder u. Men bruk så at $u = x^2 + 1$ til å komme fram til et uttrykk som bare avhenger av x. Hva blir det endelige svaret?

Den deriverte $f'(x)$ blir

1. $f'(x) = 4ux$
2. $f'(x) = 4x(x^2 + 1)$
3. $f'(x) = 2(2x + 1)$

4 Annenderivert

Dersom

$$f(x) = x^2 + 3x$$

så følger det av de reglene vi har lært at

$$f'(x) = 2x + 3$$

Men dette er igjen en funksjon vi kan derivere, det resultatet kaller vi den andrederiverte

$$f''(x) = 2$$

Den andrederiverte måler hvor fort den deriverte vokser.

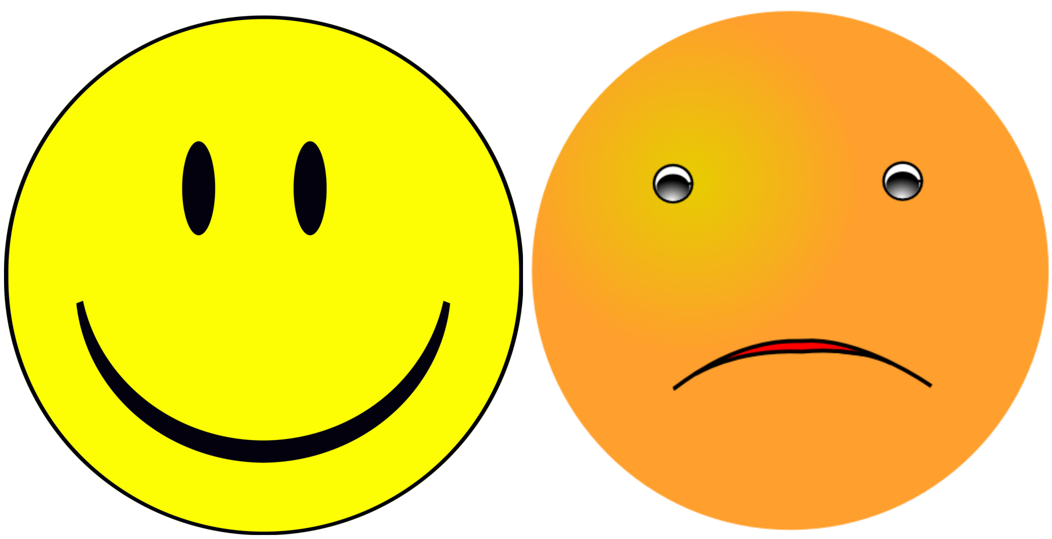
$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \text{ på } (a,b) \iff f' \text{ er voksende på } (a,b) \Leftrightarrow f \text{ er konveks på } [a,b] \\ f''(x) &\leq 0 \text{ på } (a,b) \iff f' \text{ er avtagende på } (a,b) \Leftrightarrow f \text{ er konkav på } [a,b] \end{aligned}$$

Oppgave 2 *Deriver funksjonen $f(x) = x^3$ to ganger og bruk svaret til å avgjøre om funksjonen er konveks eller konkav på intervallet [1,4]?*

Velg ett av alternativene:

1. *Den dobbeltderiverte er $f''(x) = 6x^2$ og funksjonen er konveks på intervallet [1,4].*
2. *Den dobbeltderiverte er $f''(x) = 6x$ og funksjonen er konveks på intervallet [1,4].*
3. *Den dobbeltderiverte er $f''(x) = 6x^2$ og funksjonen er konkav på intervallet [1,4].*

Oppgave 3 *Figuren viser to smiley-fjes. Tenk på munnen som grafen til en funksjon. For hver figur avgjør:*
a) Hvor er stigningstallet størst, venstre eller høyre munnvik? (Husk: Et positivt tall er større enn et negativt.)
b) Bruk svaret i a) til å avgjøre: Hva er fortegnet på den andrederiverte?
c) Er munnen konkav eller konveks?
I resten av oppgaven skal du så sammenligne de to figurene:
d) Hvilken av dem gir et mest positivt inntrykk, og har dette noe sammenheng med den andrederiverte?
e) Hvilken av munn-funksjonene er flat (derivert lik 0) i et topp-punkt?



Velg blant følgende alternativer for b) og c)

1. *Smilemunnen til venstre har positiv andrederivert og er konkav og surmunnen til høyre har negativ andrederivert og er konveks.*
2. *Smilemunnen til venstre har positiv andrederivert og er konveks og surmunnen til høyre har negativ andrederivert og er konkav.*
3. *Smilemunnen til venstre har negativ andrederivert og er konkav og surmunnen til høyre har positiv andrederivert og er konveks.*

5 Elastisiteter

La $D(p)$ være etterspørselen etter en vare når prisen er p. Det er rimelig å anta at når prisen går opp vil etterspørselen gå ned, da er $D'(p) < 0$. Anta at når prisen på et produkt øker 1 krone faller slaget 100 enheter.

$$D'(p) \approx \frac{D(p+1) - D(p)}{1} = \frac{-100}{1} = -100$$

Er det en stor eller liten reaksjon?

Vi kan tenke oss to tilfeller, **først Steinway konsertflygel**, som det selges 650 av i året, og kan koste over 100 000 kroner, la oss si det koster akkurat 100 000 kroner. Om salget faller med 100 enheter når prisen øker 1 krone, virker det som en urimelig stor eller liten virkning?

Neste eksempel er salget av **teksmeldinger (SMS)**. La oss si de koster 30 øre, og 1 milliard (I 2001 ble det sendt 50 milliarder tekstmeldinger pr mnd på verdensbasis.) Om salget faller med 100 enheter når prisen øker 1 krone, virker det som en urimelig stor eller liten virkning?

Oppgave 4 *For hvert av de to tilfellene ovenfor vurder: Om salget faller med 100 enheter når prisen øker 1 krone:*
a) Regn ut hvor mange prosent prisen øker
b) Regn ut hvor mange prosent omsetningen faller (et positivt tall).
c) Svaret i b) delt på svaret i a) er elastisiteten (strengt tatt absoluttverdien av dem). Hvilken etterspørsel er mest elastisk? (For hvilket av de to eksemplene er elastisiteten størst).

Dersom forutsetningene for regnestykket hadde stemt så ville:

1. *Etterspørselen etter konsertflygel være mest elastisk*

2. *Etterspørselen etter tekstmeldinger være mest elastisk*

Som dere kanskje har blitt overbevist om fra eksempelet ovenfor, så er $D'(p)$ lite egnet til å si noe om hvorvidt effekten av en prisendring er stor eller liten. Vi er mer interessert i hvor mange prosent salget endrer seg når vi endrer prisen 1%. Målet vi bruker da er elastisiteten (jeg forklarer hvorfor på forelesningen).

Elastisiteten $El_x f(x)$ til en funksjon $f(x)$ er gitt som

$$El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

Oppgave 5 *Bruk formelen til å regne ut elastisiteten til funksjonen $f(x) = x^a$. Om du får et komplisert uttrykk, prøv å forenkle.*

Elastisiten blir

1. a

2. $1 - a$

3. 1